L'estensione del campo numerico: una necessità, non solo matematica

1. Introduzione

L'essere umano manifesta da sempre una certa predisposizione all'estensione; potremmo indicarlo come un bisogno atavico di conquista, di allargamento dei propri orizzonti e questo perché spinto dal desiderio – o dalla necessità – di conoscenza. La storia della matematica è l'ombra della storia dell'umanità. Entrambe sono costellate da ostacoli, scoperte, fallimenti, soluzioni e sono in continuo divenire: *in estensione* appunto. Con questo contributo s'intende ripercorrere quelle che sono le molteplici *necessità* che hanno portato ad arricchire il mondo dei numeri. Lo sviluppo cognitivo del bambino nel campo numerico, e più generalmente matematico, passa inevitabilmente attraverso gli ostacoli che hanno contribuito, e che contribuiscono tutt'oggi, a scrivere la storia della matematica. Nel bambino, come nell'essere umano *tout court*, si rafforza il *senso del numero* tanto più il soggetto è in grado di riconoscere la necessità di *tale numero* come soluzione opportuna di un problema dato.

2. I numeri naturali non sono sufficienti

L'insieme dei numeri *naturali* che indichiamo con la lettera **N** è indicato come l'insieme:

$$\mathbf{N=\{0,1,2,3,\ldots\}}.$$

Con l'aggettivo *naturali* si indicano dunque tutti i numeri interi positivi e lo 0. Nella letteratura matematica è difficile risalire esattamente a chi abbia fatto uso dell'aggettivo *naturali*. Tuttavia ci separano meno di duecento anni da una formalizzazione rigorosamente matematica di questo termine. Da sempre e nella vita di tutti i giorni i numeri naturali sono utilizzati per *contare* (nell'armadio ho 10 camicie e 15 pantaloni), *ordinare* (questo quartiere è il terzo in ordine di grandezza della mia città) e *nominare* (chiamami pure allo 091 825 10 60). Al matematico Giuseppe Peano si deve la prima assiomatizzazione dell'insieme dei numeri naturali, la prima teorizzazione dell'insieme **N** che, al contrario dell'uso pratico dei numeri naturali, pose non pochi disguidi, a partire proprio dalla gestione e dall'interpretazione dell'elemento 0. Torneremo più tardi sulla questione dello 0, che tutt'oggi pone ancora dei grattacapi. E questo non solo ad insegnanti e bambini.

Consideriamo l'esempio :

Lo scorso fine settimana ho partecipato alla prima gara di nuoto della stagione. C'erano 247 spettatori, ma quando hanno festeggiato il mio settimo posto sembravano milioni che applaudivano un numero 10, mi sentivo un vero fuoriclasse. Ero felicissimo !

Nella vita quotidiana siamo confrontati con i diversi aspetti legati al numero (naturale). Oggi cercheremo di soffermarci brevemente sulla necessità pratica che restituisce del senso ai numeri.

L'insieme **N**, così come elencato, è grande, infinito, ma resta *spoglio*. I numeri portano intrinsecamente un senso non legato alle operazioni (ma relative alla natura di *ordinalità* e *cardinalità* degli elementi) ed un senso piuttosto connesso alle operazioni (*addizione-*

sottrazione prima *moltiplicazione-divisione* poi, rappresentano un po' il *cappotto di* **N**) dove, tramite l'esperienza, si restituisce ancora maggior senso al numero, anche al (controverso) zero.

Esempio 1:

Ho 9 mele, ne distribuisco 5 a Giovanni, 3 a Michela ed 1 a Marco. Quante me ne rimangono ?

Una rappresentazione grafica di **N** è la retta numerica, una retta orizzontale dove *stendere il bucato* di infiniti numeri naturali. Con l'introduzione delle operazioni la gestione della retta può diventare problematica alle sue estremità (con somma e moltiplicazione i numeri diventano grandi mentre con la sottrazione e la divisione diventano più piccoli, fino a scendere sotto lo zero).

Esempio 2:

Stamattina mi sono svegliato e ho misurato la temperatura in balcone: era di 9 gradi, nel pomeriggio è salita di 2 gradi, per poi scendere di 13 gradi. Quanti gradi ci sono secondo la mia ultima misurazione ?

Esempio 3:

Sul conto bancario di mio zio Marco c'erano chf 180.-. Soldi che abbiamo risparmiato per comprare i biglietti per la partita di calcio della nazionale svizzera. I biglietti che abbiamo acquistato con la carta di credito sono costati chf 205.-. Alla fine del mese, quanti soldi ci saranno sul conto di mio zio ?

Esempio 4:

Il cugino di un mio amico ha visitato una località che sta a -300 metri rispetto al livello del mare: cosa significa che è una città sommersa dalle acque ?

Da questi semplici esempi nasce la necessità di espandere l'insieme dei numeri naturali a quello degli interi, detti *numeri relativi*. Storicamente furono introdotti dopo l'anno mille, attorno al Medioevo, in ambito mercantile per distinguere i *debiti* dai *crediti*, e dal punto di vista prettamente matematico ebbero vita ancor più travagliata dei cugini *naturali* poiché studiosi come Cartesio pretendevano di non poter considerare vera (o sensata) la soluzione ad un problema che fosse un numero minore di *nulla* (cioè al di sotto dello 0). Oppure, nell'ambito di semplici proporzioni, 1 :-1=-1 :1, dove un numero maggiore *sta* a un numero minore, come un numero minore *sta* a un numero maggiore, non poteva essere considerato plausibile e quindi se ne screditava l'utilità e dunque l'esistenza matematica. Tale insieme, definito come **Z** (che deriva dal tedesco *Zahl*, numero), si è progressivamente imposto nella storia continuando a generare alcune incomprensioni, come il fatto che la moltiplicazione di numeri negativi generi un numero positivo. Si potrebbe dire che, nonostante le controversie, di tale insieme se ne sentisse comunque la necessità per risolvere e dare un senso anche alle situazioni semplificate negli esempi 2, 3 e 4.

L'insieme **Z** dei *numeri interi* espande l'insieme dei numeri naturali, poiché :

Z={…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,…}

Dal punto di vista grafico, la retta numerica che prima concepivamo come estendibile solo a destra (quindi con numeri naturali grandi, grandissimi) si amplia in maniera speculare alla sinistra dello 0 che ora costituisce il centro della retta, la sua « metà ». Con gli esempi considerati percepiamo la necessità di non poter confinare il campo numerico esclusivamente a quello dei *numeri naturali*. Il senso dell'estensione è dettato dalla necessità di studiare altre dinamiche.

Tuttavia i numeri interi da soli non bastano a dare senso a situazioni come quella riportata qui di seguito:

Esempio 5:

Mattia ha un cugino di nome Mark che vive in Inghilterra e passa ogni anno le vacanze in Ticino. Si preparano per uscire a giocare in giardino, si mettono le scarpe e Mattia osserva la grandezza delle scarpe di Mark. Sembrano più grandi delle sue, ma sulla suola il numero riportato è 32 mentre su quelle di Mark c'è scritto 9. Mark insiste nel dire che chiaramente le sue scarpe sono più grandi perché ha i piedi più lunghi (basta confrontare le piante dei piedi), ma Mattia decide di procedere ad una misurazione più precisa delle scarpe utilizzando la spanna (la lunghezza, in tensione, che intercorre tra il pollice e il mignolo della sua mano), stabilendo così che le sue scarpe misurano 2 spanne e un po' e quelle di Mark quasi 3 spanne. La questione è risolta e Mattia ammette che il proprio piede è più piccolo.

Nasce dunque l'ennesimo bisogno di ampliamento: il campo dei numeri interi non è più sufficiente. Alla base vi è dunque una necessità *pratica*, cioè quella di non dover soltanto contare singoli oggetti, ma di dover *misurare delle quantità*, come lunghezze, aree, pesi, tempi; tali misure ammettono suddivisioni in parti *piccole quanto si vuole*. Per risolvere il problema, il primo passo *è ridurre la questione del misurare al problema del contare*. Cominciamo con lo scegliere un'unità di misura del tutto arbitraria come la spanna, il metro, il grammo, a seconda del caso, a cui attribuiamo la misura 1. Contiamo poi il numero di tali unità che sono contenute nella quantità da misurarsi. Un certo corpo, ad esempio, può pesare esattamente 54 grammi. In generale, però, questo procedimento non conduce ad un risultato esatto, cioè la quantità data non avrà una misura che si possa esprimere esattamente con multipli interi dell'unità di misura prescelta. Al massimo potremo dire che essa è compresa tra due multipli successivi dell'unità; ad esempio tra 32 e 33 grammi. Quando questo accade, si compie un altro passo introducendo nuove unità di ordine inferiore, ottenute con la suddivisione dell'unità originaria in un numero n di parti uguali. Nel linguaggio ordinario queste nuove unità possono avere nomi speciali; ad esempio, il metro si suddivide in 10 decimetri, l'ora in 60 minuti, il grammo in 10 decigrammi, ecc.. In matematica, comunque, un'unità di ordine inferiore ottenuta suddividendo l'unità originaria in n parti uguali si indica con il simbolo $1/n$; e se una data quantità contiene esattamente m di queste unità di ordine inferiore, la sua misura si indica con il simbolo m/n. Tale simbolo si chiama **frazione** (o rapporto). L'altra motivazione per l'estensione dei numeri interi ai numeri razionali è prettamente *aritmetica* e deriva dal fatto che in **Z** il quoziente tra due numeri a e b è definito solo se esiste un terzo numero intero q tale che *moltiplicando* b *con* q *troviamo* a, ossia se b è un divisore di a. L'introduzione del simbolo a/b, detto **frazione**, che per definizione è quel numero tale che *moltiplicato con* b *ritroviamo* a risolve il problema (restando l'unica restrizione di b diverso da 0). Quindi l'insieme dei *numeri razionali* **Q** (notato **Q** da *Quoziente* e chiamati così dal latino *Ratio*, rapporto) espande a sua volta l'insieme **Z**:

$$\mathbf{Q}=\{\ldots, -7/2, -3, -2, -1, 0, 0.5, 1, 2, 3, 3.333333,\ldots\}$$

Quindi la retta numerica (mentale e formale) dopo essersi allungata a sinistra dello zero inizia a popolarsi tra gli spazi (più o meno lineari) che la scalfiscono. L'insieme dei *numeri razionali* estende così l'insieme degli interi poiché l'insieme dei *numeri razionali* contiene tutti i numeri interi (positivi e negativi) e non interi, cioè decimali, che siano essi di *decimali finiti* o *infiniti periodici*.

Anche l'insieme dei *numeri razionali*, con il complicarsi e l'ampliarsi delle situazioni considerate e della difficoltà degli ostacoli incontrati, non è più sufficiente. Anche i numeri razionali non bastano: abbiamo la necessità di *misurare* quantità che non sono esprimibili come frazioni dell'unità di misura; ad esempio dobbiamo poter misurare la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti misurino 1 e 2, oppure la lunghezza della diagonale di un quadrato il cui lato misura 1. Conoscere il lato di un quadrato la cui area misura 2 metri quadrati, oppure conoscere l'area o la circonferenza di un cerchio.

Con le frazioni termina l'insegnamento primario e inizia quello medio. Parallelamente, in ambito aritmetico, fa la sua comparsa l'operazione di estrazione della radice (l'inversa dell'elevazione alla potenza), il cui risultato esula, il più delle volte, il campo prettamente razionale. Prendiamo per esempio radice di 2 (cioè quel numero che elevato a 2 sia uguale a 2); è un numero decimale infinito, che non è però esprimibile come frazione, cioè non esistono 2 numeri interi che divisi tra loro restituiscono il valore radice di 2. Questi valori, come le radici, che sfuggono alla logica dei numeri razionali, sono appunto chiamati *irrazionali*, tra di essi il più celebre è sicuramente *Pi greco*.

A livello prettamente *aritmetico*, la necessità di estendere l'insieme dei numeri razionali nasce ancora una volta dall'esigenza di effettuare senza restrizioni un'operazione (l'estrazione di radice) il cui risultato può non essere una frazione, difatti quasi mai lo è. Sappiamo che è possibile estrarre *esattamente* solo la radice *n*-esima di un numero che sia potenza *n*-esima, mentre negli altri casi è possibile estrarre la radice solo con un certo grado di approssimazione. Ad esempio, sappiamo che 2 elevato a 3 è uguale a 8 , e quindi la radice cubica di 8 è 3, ma non possiamo, con le operazioni razionali, calcolare quel numero che elevato alla seconda dia come risultato 2, ossia non possiamo *calcolare esattamente* radice di 2, possiamo solo approssimarla. Quando si opera sugli irrazionali espressi come allineamenti decimali, in realtà si lavora sempre e solo con *approssimazioni*, e se si vuole la *precisione* è necessario ricorrere al *simbolo* (per esempio, la radice di 2 si esprime: $\sqrt{2}$)

Con l'introduzione del nuovo insieme numerico, indicato con **I** (che sta per *numeri irrazionali*), abbiamo risolto solo in parte il problema dell'operazione inversa dell'elevamento a potenza, nel senso che nonostante la nostra "estensione", abbiamo ancora delle restrizioni: poiché, dalla definizione delle operazioni sui numeri relativi, sappiamo che qualunque numero, positivo o negativo, elevato a potenza di esponente pari dà come risultato un numero positivo. Ma il passaggio inverso risulta più problematico poiché non è comunque possibile estrarre la radice pari di un numero negativo! Cioè, sappiamo benissimo che il quadrato di (-1) è uguale a 1, ma se volessimo poter calcolare $\sqrt{-1}$, avremmo bisogno ancora una volta di estendere il nostro insieme numerico ai numeri **complessi**, nei quali si può effettivamente estrarre qualunque radice di qualunque numero, positivo o negativo, ottenendone un risultato cosidetto *immaginario*.

L'insieme dei numeri razionali e di quelli irrazionali costituisce l'insieme dei **numeri reali** (il termine coniato da Cartesio attorno al 1600 è in contrapposizione all'aggettivo *immaginario*, relativo ai numeri complessi), che si indica con **R**:

$$\mathbf{R=\{\ldots, -7/2, -\pi, -3, -2, -1, 0, 0.5, 1, \sqrt{2}, 2, e, 3,\ldots\}}$$

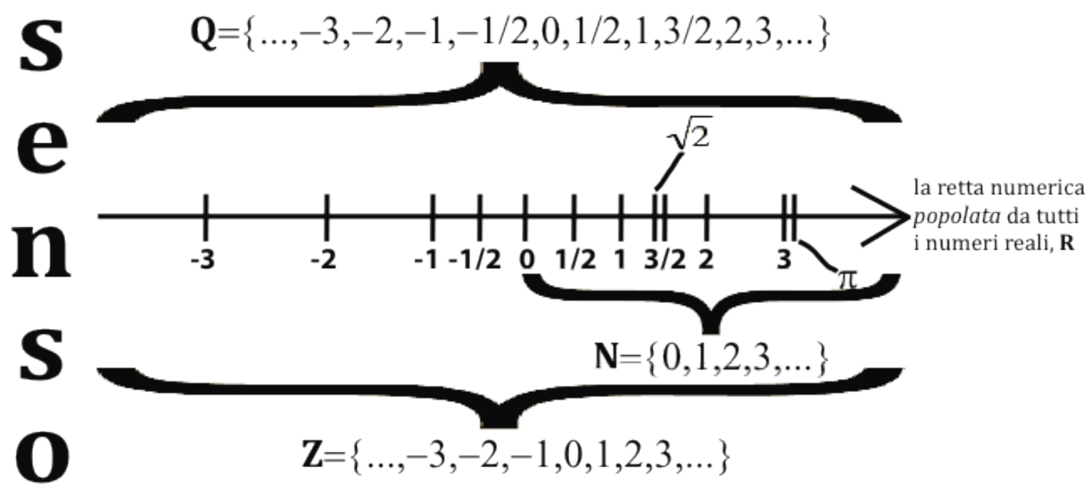
Si potrebbe forse pensare che i numeri irrazionali costituiscano solo delle eccezioni, più o meno rare, nell'insieme dei numeri reali. Tale supposizione si rivela subito falsa se si pensa che ogni numero razionale può dar luogo ad infiniti numeri irrazionali, applicando ad esso infinite operazioni diverse (ad esempio l'estrazione della radice quadrata, cubica, quarta, ecc.) che danno risultati irrazionali. Questa considerazione pone già da sola in evidenza, come si potrebbe dimostrare, che la maggior parte dei numeri reali sono irrazionali, e che sono proprio i numeri razionali a costituire delle "eccezioni" nei numeri reali. La retta numerica si è popolata di un'infinità di numeri e pare non bastare più a contenerli.

3. Senso del numero e costruzione dei numeri naturali

Nella didattica della matematica il tema del *senso del numero* non è ancora universalmente chiaro. Ma riportando una citazione che compare nell'articolo di A. Piatti e I. Dellagana [1] e che potete scaricare dal sito dimat.ch ne riporto due definizioni:

Con senso del numero s'intende "*una comprensione intuitiva dei numeri, della loro grandezza, delle loro relazioni e di come sono influenzati dalle operazioni*." O ancora, "*la comprensione generale dei numeri, delle operazioni, delle loro relazioni e la capacità di trattare problemi della vita di tutti i giorni tramite un approccio numerico*."

Dunque è bene incentivare la proposta di attività didattiche riguardanti la retta numerica (insistendo sull'aspetto ordinale e cardinale del numero) andando così a supportare quell'effetto denominato SNARC (vedi in [1]) secondo il quale nell'essere umano sarebbe insita la capacità di legare numeri e spazio in una rappresentazione mentale di una retta numerica orizzontale sulla quale sono disposti a sinistra i numeri piccoli e a destra i numeri più grandi (con separazioni più o meno lineari), curando da vicino le difficoltà dei bambini con le relazioni tra i numeri con e senza le operazioni annesse. Tuttavia, senza troppo sul termine usato (per questo rimando nuovamente all'articolo di Piatti-Dellagana e alla bibliografia in esso presente) parlare di senso del numero, significa essere in grado di rappresentare quanto segue, evitando di memorizzare uno *scheletrico* schema matematico, ma rimpolpandolo del senso che ha permesso tale costruzione attraverso la storia:



Grazie a questa rappresentazione, ci possiamo rendere conto della necessità di ogni singolo mattone (dando così un senso alla costruzione teorica). Fatte queste premesse, è dunque fondamentale insistere sul bisogno concreto dell'estensione del campo numerico in senso lato.

Agli allievi delle scuole elementari (oltre alla padronanza delle relazioni con e senza operazioni), viene richiesto di raggiungere parallelamente quella capacità di *snaturare* il numero naturale e cioè di percorrere il cammino minato dell'astrazione che deve permettere di concepire il numero 6, per esempio, come una rappresentazione di tutti gli effettivi insiemi contenenti 6 elementi e che non dipende né dalle quantità specifiche di tali oggetti né dai simboli usati (simboli arabi, numeri romani o altro). I numeri non hanno alcun riferimento alla natura degli oggetti contati o considerati. Difatti, la costruzione assiomatica sulla quale si basa la matematica moderna (V.B.G, da Von Newman, Bernays e Kurt Gödel matematici della prima metà del '900), cioè l'insieme di regole che costituisce la *Magna Carta* dei matematici, o per meglio dire della maggior parte di essi, poiché ci sono visioni discordanti anche all'interno della comunità dei matematici. Semplificando si definisce **N** come il più piccolo insieme (però infinito) in cui è possibile costruire gli elementi in questo modo, induttivamente, da un simbolo di partenza:

$$\begin{array}{rcc} \emptyset & \approx & \mathbf{0} \\ \{\emptyset\} & \approx & \mathbf{1} \\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\} & \approx & \mathbf{2} \\ \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} & \approx & \mathbf{3} \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Una delle regole fondamentali è che l'elemento primordiale (indicato con $\emptyset$) esista. La sua esistenza è un assioma, una regola certa che non necessita spiegazioni di sorta ma coerente con l'insieme di regole in vigore. Dunque, semplificando, l'esistenza di una modellizzazione matematica dei numeri naturali posa sull'esistenza di tale *entità matematica*. L'assioma rassicura la teoria matematica – e diversi matematici – ma non restituisce il senso del numero 0. Solo espandendo il campo numerico (operando per sottrazione, per esempio) e sfociando così nell'universo degli *interi (relativi)* iniziamo ad intuirne il senso.

Nella letteratura puramente matematica assistiamo ad una vera e propria *emarginazione* del senso del numero 0 (anche se con l'analisi ed il concetto di limite si è modellizzata una soluzione più che comoda dello 0); diversi autori adoperano, secondo le necessità, la notazione **N** per i numeri naturali propriamente detti (che riposano sull'assiomatizzazione di Peano) e **N*** cioè i *numeri naturali* senza lo 0 (anche perché tale insieme è più completo dal punto di vista delle strutture matematiche).

Si intuisce la necessità dettata dal senso di percorrere la retta numerica incominciando da 1. Noi contiamo, *naturalmente*, usando le dita (non cominciamo a contare spontaneamente con un pugno chiuso simboleggiando lo 0!). Il bisogno di estensione del campo numerico ci ha indotto a (ri)vedere la retta numerica come uno spazio arricchito da un popolo di numeri che si è sviluppato secondo le necessità dell'evoluzione umana e restituendo *più senso* anche allo 0.

Mi pare appropriato citare una frase significativa di un celebre matematico, Godfrey H. Hardy, vissuto a cavallo tra il XVIII e il IXX secolo a cui si devono importanti risultati nell'algebra moderna che diceva: *I numeri naturali sono opera di Dio, il resto è opera dell'essere umano.*

4. conclusione

In questo contributo, intitolato generosamente *l'estensione del campo numerico*, si è ritenuto opportuno rivedere insieme le principali estensioni (naturali) di insiemi numerici, sottolineandone la necessità concreta e sfiorando così le complessità che risiedono nel termine *il senso del numero*. A tal proposito, trovo opportuno citare il pensiero di Vergnaud, fonte d'ispirazione di questo intervento:

« Le concept de nombre ne se réduit ni au critère de la conservation, ni à l'activité de dénombrement, ni à la résolution d'une classe de problèmes, ni à quelques procédures automatisables, ni à la compréhension et à la manipulation de signes sur le papier.
Mais c'est de cet ensemble d'éléments divers qu'émerge, avec l'aide de l'environnement familial et scolaire, l'un des édifices cognitifs les plus impressionnants ».

Rendere accogliente e stimolante questo *impressionante edificio cognitivo* è uno degli obiettivi della scuola. I tempi di costruzione e d'apprendimento di tale edificio sono lunghi e la posa di ogni mattone è importante per la sua realizzazione.
Per concludere, nella bibliografia trovano spazio alcuni suggerimenti interessanti estratti dall'opera di Vergnaud. Ringraziamo inoltre il Prof. Ivo Dellagana per gli interessanti spunti di riflessione, in parte, presentati in questo testo.

5. Bibliografia

- [1] Alberto Piatti e Ivo Dellagana, *Estensione del campo numerico e senso del numero nella scuola elementare: spunti teorici e proposte didattiche*, 2009

- [2] Gérard Vergnaud, *La théorie des champs conceptuels*, R.D.M., vol. 10/2.3., 133-170, 1994

- [3] Gérard Vergnaud, *Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques*, Revue Française de Pédagogie, N. 96, 79-86, 1991

- [4] Gérard Vergnaud, *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Berne: Peter Lang., 1981